Chapitre3

PROBABILITÉS – RAPPELS ET COMPLÉMENTS

1. Espaces probabilisés

DÉFINITION (VOCABULAIRE DE BASE)

- **univers :** noté Ω représente un ensemble quelconque (fini, infini, dénombrable ou non)
- **issue :** notée ω représente un élément de Ω
- **événement :** une partie A de Ω (i.e. $A \in \mathscr{P}(\Omega)$).
- **événement contraire :** noté $\overline{A}$ définit comme l'ensemble des issues qui ne sont pas dans A
- **tribu :** notée $\mathscr{A}$ représente une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$ contenant Ω, stable par passage au complémentaire et par intersection dénombrable $\rightsquigarrow$ on dit que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un **espace probabilisable**
- **probabilité :** une application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

  $$\mathbb{P}(\Omega) = 1\,;$$

  $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$ où les A_i est sont deux à deux disjoints.

  $\rightsquigarrow$ on dit que $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**
- **événements incompatibles :** A et B sont incompatibles si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
- **événement quasi-sûr :** on dit que A est quasi-sûr (resp. certain) si $\mathbb{P}(A) = 1$ (resp. $A = \Omega$)
- **probabilité conditionnelle :** $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ avec A, B événements A quelconque et $\mathbb{P}(A) > 0$. $\rightsquigarrow$ **rem.** $\mathbb{P}_A : B \mapsto \mathbb{P}_A(B)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$
- **événements indépendants :**

  A et B sont indépendants $\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Longleftrightarrow \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$

  $(A_1, \ldots, A_n)$ sont mutuellement indépendants $\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_n)$.

REMARQUE 1.
L'égalité $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ signifie que la STP $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ converge et que sa somme vaut $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

EXERCICE 1. On dispose d'une pièce de monnaie amenant PILE avec probabilité $p \in]0;1[$ et on la lance jusqu'à l'obtention du premier PILE.
On note :
- A_n : « on obtient PILE pour la première fois au n-ième lancer » $(n \in \mathbb{N}^*)$
- A : « on obtient toujours FACE »

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_n)$ et montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ est quasi-sûr.
2. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$.

PROPRIÉTÉ 4 (PROPRIÉTÉS OPÉRATOIRES)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements.

- $P(\Omega) = 1$ et $P(\varnothing) = 0$.
- **événements contraires :** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- **différence d'évènements :** $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ rappelons que $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.
- **croissance de $\mathbb{P}$:** Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

- **réunion :**

  formule du crible de Poincaré :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})\right)$$

  σ-additivité : $\underbrace{\forall i\neq j,\quad \mathbb{P}(A_i\cap A_j)=0}_{\textbf{incompatibilité 2 à 2}} \quad\Rightarrow\quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n)$

  limite monotone : $\underbrace{\forall n\in\mathbb{N},\quad A_n\subset A_{n+1}}_{\textbf{suite croissante}} \quad\Rightarrow\quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(A_n)$

- **intersection :**

  formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)\times P_{A_1}(A_2)\times\ldots\times P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

  indépendance : $(A_1,\ldots,A_n)$ indépendants $\quad\Rightarrow\quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}A_k\right)=\prod_{k=0}^{n}\mathbb{P}(A_k)$

  limite monotone : $\underbrace{\forall n\in\mathbb{N},\quad A_{n+1}\subset A_n}_{\Longleftrightarrow (A_n)_n\ \textbf{suite décroissante}} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}A_n\right)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(A_n)$

EXERCICE 2 (indépendance vs probabilités composées)**.**
Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire successivement dans cette urne successivement. jusqu'à l'obtention de la première boule rouge. Quelle est la probabilité de l'évènement A_k : « tirer une boule rouge pour la première fois au k-ième tirage » dans les cas suivants :

- Tirages successifs avec remise (on précisera l'ensemble des valeurs de k possibles)
- Tirages successifs sans remise (on précisera l'ensemble des valeurs de k possibles)

EXERCICE 3 (ultra classique)**.**

1. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.
   (a) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $1-x\leqslant\exp(-x)$.
   (b) Montrer que, pour tous entiers m,n vérifiant $1\leqslant n\leqslant m$, on a :
   $$P\left(\bigcup_{k=n}^{m}A_k\right)\geqslant 1-\exp\left(-\sum_{k=n}^{m}P(A_k)\right).$$
   (c) On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1}P(A_n)$ diverge.
   Montrer que :
   $$P\left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n}A_k\right)=1.$$

Cas d'une expérience dont l'issue dépend du résultat d'une expérience antérieure

DÉFINITION (SYSTÈME COMPLET D'ÉVÉNEMENTS)

$(A_i)_{i\in I}$ est un **système complet d'événements** une famille finie ou dénombrable d'évènements telle que :

- les évènements A_i sont deux à deux incompatibles
- $\bigcup_{i\in I}A_i=\Omega$ ou plus généralement $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=1$

REMARQUE **2.**
1) Pour tout évènement $A\subset\Omega$, $(A,\bar{A})$ est un système complet d'évènements.
2) Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements, alors $\sum_{i\in I}P(A_i)=1$.

EXERCICE 4. On lance une infinité de fois une pièce equilibrée. Pour tout $i\geqslant 1$, on note A_i l'évènement : « faire i lancers avant de faire FACE pour la première fois ». Montrer que la famille $(A_i)_{i\geqslant 1}$ est un système complet d'évènements.

THÉORÈME 5 (FORMULES DES PROBABILITÉS TOTALES)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements. Pour tout évènement B tel que $\mathbb{P}(B)>0$:

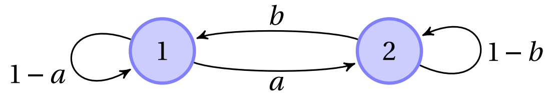
$$P(B)=\sum_{i\in I}P(B\cap A_i)\underset{\forall i\in I,\,P(A_i)\neq 0}{=}\sum_{i\in I}P(A_i)\times P_{A_i}(B).$$

Exercice 5 (Chaîne de Markov : le zappeur compulsif)**.**
Soit $(a,b) \in [0,1]^2$. On considère un *zappeur compulsif* qui hésite entre les chaînes 1 et 2. A l'instant initial il choisit la chaîne au hasard de manière équiprobable, puis à chaque instant :

• s'il est sur la chaîne 1, il zappe sur la chaîne 2 avec probabilité a

• s'il est sur la chaîne 2, il zappe sur la chaîne 1 avec probabilité b.

On peut associer cette situation au graphe probabiliste suivant :



Pour tout n, on note a_n la probabilité que le zappeur soit sur la chaîne 1 à l'instant n et $b_n = 1 - a_n$, puis on note enfin $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
On suppose qu'à l'instant initial le zappeur regarde la chaîne 1 ; on a donc $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.
2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n U_0$
3. Montrer que : $A^n = \dfrac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b+ar^n & a-ar^n \\ b-b-r^n & a+br^n \end{pmatrix}$ avec $r = 1-a-b$.
4. En déduire a_n et b_n en fonction de n, a et b.
5. Déterminer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n$ et interpréter le résultat.

Théorème 6 (Formule de Bayes)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'évènements. Pour tout évènement B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$:

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{P(B)} \underset{\forall i \in I, P(A_i) \neq 0}{=} \frac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{\sum\limits_{i \in I} P(A_i) \times P_{A_i}(B)}.$$

Exercice 6 (Formule de Bayes)**.** On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de sorte que le côté pile a une probabilité d'apparition de $\frac{2}{3}$, et de deux urnes : l'urne A contient deux boules rouges et trois boules vertes et l'urne B contient trois boules rouges et deux boules bleues. On lance la pièce. On pioche alors successivement et avec remise deux boules dans l'urne A si le côté pile apparaît ou bien dans l'urne B si le côté face apparaît.

1. Soit E_k l'évènement « on obtient exactement k boules rouges » pour chaque $k \in \{0,1,2\}$. Calculer $P(E_k)$.
2. Calculer la probabilité que les tirages aient été effectués dans l'urne A sachant qu'on a obtenu :
   (a) deux boules rouges ;
   (b) au moins une boule rouge.

2. Variables aléatoires

Définition (vocabulaire de base)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- **variable aléatoire réelle (v.a.r) :** est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(X \leqslant x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \,]-\infty; x]\}$ est un événement i.e $(X \leqslant x) \in \mathscr{A}$
- **support :** $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \subset \mathbb{R}$ c'est l'ensemble des valeurs prises par X
- **fonction de répartition :** c'est la fonction $F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & P(X \leqslant x) \end{array}$
  $\rightsquigarrow$ **X et Y ont même loi** $\Longleftrightarrow F_X = F_Y$
- **variables aléatoires discrètes (v.a.r.d) :** $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ est (au plus) dénombrable.
  $\rightsquigarrow$ **événements élémentaires :** les $(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$
- **loi d'une v.a.r.d :** c'est la donnée des probabilités $\big(\mathbb{P}(X = k)\big)_{k \in X(\Omega)}$
  $\rightsquigarrow$ **rem. :** $\mathbb{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$
- **s.c.e associé à une v.a.r.d :** le système $\big((X = k)\big)_{k \in X(\Omega)}$ forme un s.c.e
- **variables indépendantes :**
  • X et Y indép. $\Longleftrightarrow \forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}\big((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)\big) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \times \mathbb{P}(Y \leqslant y)$
  $\rightsquigarrow$ X **v.a.r.d :** $\mathbb{P}\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$
  • $(X_1, \ldots, X_n)$ sont mutuellement indépendants $\Longleftrightarrow$:
  $$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega), \mathbb{P}\big((X_1 \leqslant x_1) \cap \ldots \cap (X_n \leqslant x_n)\big) = \prod_{I=1}^{n} F_{X_i}(x).$$
  $\rightsquigarrow$ X **v.a.r.d :** $\mathbb{P}\big((X_1 = x_1) \cap \ldots \cap (X_n = x_n)\big) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$
- **inégalité presque-sûre (p.s) :** $X \leqslant Y$ p.s $\Longleftrightarrow \mathbb{P}(X \leqslant Y) = 1$.

- **moments des v.a.r.d :**
  - *ordre 1 (espérance) :* X admet une espérance $\Longleftrightarrow \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)$ est AC

  $\rightsquigarrow$ **exemple si** $X(\Omega)=\mathbb{N}$ **:** $\mathbb{E}(X)$ existe $\Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n)$ est AC et $\mathbb{E}(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n)$
  - *Thm de transfert :* soit $Y=g(X)$ avec $g: X(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$,
    Y admet une espérance $\Longleftrightarrow \sum_{n\in X(\Omega)} g(n)\mathbb{P}(X=n)$ est AC
  - *ordre r :* X admet un moment d'ordre $r \Longleftrightarrow \sum_{x\in X(\Omega)} x^r\mathbb{P}(X=x)$ est AC

  $\rightsquigarrow$ **exemple si** $X(\Omega)=\mathbb{N}$ **:** $E(X^2)$ existe $\Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\mathbb{P}(X=n)$ est AC et $\mathbb{E}(X^2)=\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X=n)$
- **variance :** si X admet un moment d'ordre 2 : $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\big((E-\mathbb{E}(X))^2\big)$

  $\rightsquigarrow$ **Formule de Koenig-Huygens :** $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\big(\mathbb{E}(X)\big)^2$
- **lois discrètes usuelles :**
  - *lois certaines :* $X(\Omega)=\{a\}$, $P(X=a)=1$, $\mathbb{E}(X)=a$, $\mathbb{V}(X)=0$
  - *lois de Bernoulli :* $X(\Omega)=\{0,1\}$, $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$,
    $\mathbb{E}(X)=p$, $\mathbb{V}(X)=p(1-p)$
  - *lois uniformes :* $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$, $P(X=k)=\dfrac{1}{n}$,
    $$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i,\ \mathbb{V}(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2-\big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$
    cas particuliers : $X(\Omega)=[\![a;b]\!]$, $\mathbb{E}(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $\mathbb{V}(X)\dfrac{b^2-a^2}{12}$
  - *lois binomiales :* $X(\Omega)=[\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$,
    $\mathbb{E}(X)=np$, $\mathbb{V}(X)=np(1-p)$
  - *lois géométriques :* $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$, $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{p}$, $\mathbb{V}(X)=\dfrac{q}{p^2}$
  - *lois de Poisson :* $X(\Omega)=\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{k}{k!}$, $\mathbb{E}(X)=\lambda$, $\mathbb{V}(X)=\lambda$

EXERCICE 7 (loi et espérance d'une v.a.r.d)**.**

1. Déterminer une constante $c\in\mathbb{R}$ telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\dfrac{c}{2^{n+1}}$ définisse la loi d'une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
2. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $P(X=n)=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'on définit bien ainsi une variable aléatoire. Y admet-elle une espérance? Si oui, la donner.
   On utilisera librement que $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.
3. Soit un réel c. On pose, pour tout $n\in\mathbb{Z}-\{0;1\}$, $u_n=\dfrac{c}{n(n-1)}$.
   Montrer qu'il existe une unique valeur de c telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}-\{0;1\}}$ définisse la loi d'une variable aléatoire réelle discrète X (on ne demande pas de calculer la valeur de c). La variable $|X|$ admet-elle une espérance?
4. Soit $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$ où $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.
   (a) On pose $Y=(-1)^X$. Déterminer la loi de Y en déduire que Y admet une espérance et la calculer.
   (b) La variable aléatoire $Y=e^X$ admet-elle une espérance? Si oui, la déterminer.
   (c) La variable aléatoire $Z=\dfrac{1}{X+1}$ admet-elle une espérance? Si oui, la déterminer.

EXERCICE 8. Fonction indicatrice d'un événement.
Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A\in\mathscr{A}$.
On appelle **fonction indicatrice de** A la variable aléatoire définie par :

$$\mathbb{1}_A:\ \begin{array}{ccc}\Omega & \to & \mathbb{R}\\ \omega & \mapsto & \begin{cases}1 & \text{si } \omega\in A\\ 0 & \text{si } \omega\notin A\end{cases}\end{array}$$

1. Montrer que $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire discrète suivant la loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
2. Soient A,B des événements. Exprimer $\mathbb{1}_{\overline{A}}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\cup B}$, $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
3. Montrer que $F_X(x)=\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{(X\leqslant x)}\big)$

EXERCICE 9 (Une formule classique)**.**
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Justifier que pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, $P(X=k)=P(X>k-1)-P(X>k)$.
2. En déduire que X admet une espérance si et seulement si $\sum_{k\geqslant 1}P(X>k)$ converge et $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X>k)$.

EXERCICE 10 (Fonction de répartition de la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$)**.**

1. Soit X une variable discrète de support $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i) \text{ et } \mathbb{P}(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)$$
2. En déduire la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

EXERCICE 11 (Fonction caractéristique)**.**
Soit X une v.a.r.d et $t \in \mathbb{R}$, on pose, sous réserve d'existence $\varphi_X(t) = E\left(e^{-tX}\right)$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, ..., X_n$ des var mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$.

1. Montrer que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Montrer que φ_{S_n} est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi_{S_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 12 (Loi de Pascal)**.** On lance une infinité de fois une pièce qui renvoie pile avec probabilité $p \in]0,1[$. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et X la variable aléatoire vaut le nombre de lancers effectués pour obtenir exactement r fois piles (c'est-à-dire le rang d'arrivée du r-ème pile) s'il existe, et qui vaut 0 sinon. On pose $q = 1 - p$.

1. Montrer que $X(\Omega) = \{0\} \cup [\![r; +\infty[\![$, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant r$,
$$P(X = k) = \begin{pmatrix} k-1 \\ r-1 \end{pmatrix} q^{k-r} p^r.$$
2. Que peut-on dire de la loi de X lorsque $r = 1$?
3. Dans le cas où $r = 2$, montrer que X admet une espérance et qu'elle vaut $\dfrac{r}{p}$.
4. *Simulation informatique :* la fonction suivante prenant en entrée un entier `r` et un réel `p` et renvoyant une simulation de la loi de Pascal de paramètres (r, p) :

```
import random as rd
def pascal(r,p):
    nb_lancer = 0
    nb_pile = 0
    while nb_pile< ....  :
        nb_face = 0
        while rd.random() > p:
              ................
        nb_pile += 1
        nb_lancer +=   ..........
    return  ..........
```

PROPRIÉTÉ 7 (RÉSUMÉ DU COURS D'ECG1)

- **caractérisation d'une fonction de répartition :**
$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une v.a.r X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ si et seulement si :
  - $i.$ F est croissante (sur $\mathbb{R}$),
  - $ii.$ F est continue à droite en tout point : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = F(a)$.
  - $iii.$ $F(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ et $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
- **lemme des coalitions :** si les v.a.r X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes alors toutes fonctions de $X_1, ..., X_p$ est indépendante de toute fonction de $X_{p+1}, ..., X_n$.
- **caractérisation d'une loi discrète :**
Une familles de réels $(p_i)_{i \in I}$ est la loi de probabilité d'une v.a.r.d X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ si et seulement si $\begin{cases} \forall i \in I, p_i \in \mathbb{R}_+ \\ \sum\limits_{i \in I} p_i = 1 \end{cases}$
- **espérance :**

  linéarité de l'espérance : si $X_1, ..., X_n$ admettent des espérances et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ admet une espérance et
$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(X_i)$$
  espérance et indépendance : si $X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes et admettent des espérances, alors $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ admet une espérance
$$\text{et } \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$
  domination :

  Version 1. Si $0 \leqslant X \leqslant Y$ (p.s.) et Y admet une espérance, alors X admet une espérance.

  Version 2. Si $|X| \leqslant Y$ (p.s.) et Y admet une espérance, alors X admet une espérance.

  Version 3. Si X est bornée (p.s.) alors X admet une espérance.

inégalité triangulaire :
X admet une espérance $\iff |X|$ admet une espérance et $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.
croissance de l'espérance :
si X et Y admettent une espérance et $X \leqslant Y$ p.s $\Longrightarrow \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$

- **variance :**

définition : X admet une variance $\iff (X-E(X))^2$ admet une espérance et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X-E(X))^2\big)$

Koenig-Huygens : X admet une variance $\iff$ X admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$

opérations : si X admet une variance et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors $aX+b$ admet une variance et $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

lien avec l'espérance :
X admet une variance $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ X admet une espérance.

REMARQUE **3.**
L'ensemble des v.a.r X telle que $|X|$ admette une espérance est un **espace vectoriel**.
De même avec l'ensemble des v.a.r X telles que X^2 admettre une espérance.

EXERCICE 13 (Caractérisation de la loi géométrique : loi sans mémoire)**.**
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si X suit une loi géométrique, alors on a la propriété :
$(*)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $h \in \mathbb{N}^*$ on a $P_{[X>n]}([X>n+h]) = P([X>h])$.
On dit que la loi géométrique est sans mémoire.
2. Réciproque. On suppose que X est sans mémoire i.e. X vérifie $(*)$.
   (a) On pose $q = P(X>1)$. Montrer que la suite $(P(X>n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q.
   (b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = P(X=1)$.

EXERCICE 14 (max et min de v.a.r. indépendantes)**.**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X_1, ..., X_n des v.a.r. mutuellement indépendantes suivant une même loi et de fonction de répartition commune notée F.
On pose $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $T_n = \min(X_1, ..., X_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_n de M_n en fonction de F.
2. Déterminer la fonction de répartition G_n de T_n en fonction de F.
3. Déterminer F_n et G_n lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

EXERCICE 15.

1. Montrer que si X admet une variance alors elle admet une espérance.
2. Réciproque fausse : Soit X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et de loi $\mathbb{P}(X=n) = a_n = \dfrac{\alpha}{n^3}$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définisse bien une loi de probabilité.
   (b) Montrer que X admet une espérance mais pas de variance.

EXERCICE 16. Une urne contient 4 boules blanches et 12 boules rouges. On effectue des tirages successifs avec remise dans l'urne. Après chaque tirage, on ajoute trois boules de la même couleur que celle qui a été tirée.
On note X_n la variable aléatoire valant 1 si la boule prélevée au n-ième tirage est rouge et 0 sinon, et S_n le nombre de boules rouges tirées après n tirages.

1. *Simulation informatique :*
   (a) compléter la fonction suivante qui prend en argument deux entiers bar et qui renvoie une simulation du tirage d'une boule dans une urne contenant b boules blanches et r boules rouges et qui renvoie la valeur 1 si on a tiré une boule rouge et 0 sinon.

```
import random as rd
def tirage(b,r):
  X = 0
  if ............... :
        X = 1
  return .....
```

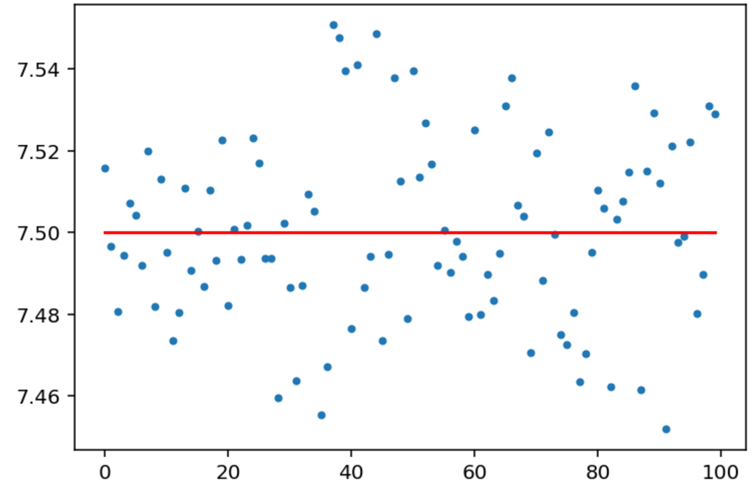
   (b) Compléter la fonction suivante qui prend en argument un entier n et renvoie une simulation de la variable S_n :

```
def simul_S(n):
  b = ...
  r = ...
  s = 0
  for _ in range(n):
    if tirage(b,r) == 1:
      r += ...
      s += ...
    else:
      ......
  return s
```

(c) On ajoute les lignes suivantes :

```python
import matplotlib.pyplot as plt
n=10
N=100
l = []
for _ in range(N):
    x=np.mean([simul_S(n) for _ in range(10000)])
    l.append(x)
plt.plot(l,'.')
plt.plot([7.5]*100,color='red')
plt.show()
```

Pour obtenir le rendu graphique suivant :



Quelle conjecture pouvons-nous émettre ?

2. *Etude mathématiques :*
   (a) Déterminer la loi de X_1, son espérance, sa variance.
   (b) Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $[X_1 = 0]$. En déduire la loi conjointe du couple (X_1, X_2), puis celle de X_2.
   X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
   (c) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $P_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 1)$.
   En déduire que $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{12 + 3\mathbb{E}(S_n)}{16 + 3n}$.
   (d) Exprimer $E(S_{n+1})$ en fonction de $E(S_n)$.
   (e) Montrer que $E(S_n) = \dfrac{3}{4}n$, puis en déduire la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Espérance conditionnelle

DÉFINITION (ESPÉRANCE CONDITIONNELLE)

Soient X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et $A \in \mathscr{A}$ tel que $P(A) \neq 0$.
On appelle **espérance conditionnelle de** X **sachant** A, lorsqu'elle existe, l'espérance de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P_A)$; lorsqu'elle existe, on la note, $E(X \mid A)$.
Lorsque est une v.a.r.d, X admet une espérance conditionnelle sachant A

$$\iff \sum_{x \in X(\Omega)} x P_A(X = x) \text{ est absolument convergente}$$
$$\iff \sum_{x \in X(A)} x P_A(X = x) \text{ est absolument convergente}$$

REMARQUE **4.** 1. On verra dans un chapitre futur qu'il existe des v.a.r d'un autre type que les v.a.r.d, dites *variables à densité*, et pour lesquelles nous pourrons encore définir cette espérance.

2. L'espérance conditionnelle étant une espérance (sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}_A)$), elle possède toutes les propriétés connues de Lespérance : linéarité, croissance etc ...

THÉORÈME 8 (FORMULE DE L'ESPÉRANCE TOTALE)

Soit X une v.a.r.d, I un ensemble fini ou dénombrable, $(A_i)_{i \in I}$ un s.c.e, tous de probabilité non nulle.
Dans ces conditions, X admet une espérance si et seulement si :

- pour tout $i \in I$, $\mathbb{E}(X \mid A_i)$ existe),
- $\sum_{i \in I} \mathbb{E}(X \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$ est AC ;

de plus, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} \mathbb{E}(X \mid A_i)\mathbb{P}(A_i) \text{ (formule de l'espérance totale)}$$

REMARQUE **5.**
La démonstration de ce théorème bien que très instructive n'est pas un attendu du programme. Son utilisation en revanche l'est fortement.

EXERCICE 17 (Somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires.).
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi et admettant une espérance. Soit de plus N une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, admettant une espérance et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N, X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. On suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(N = n) \neq 0$.

On pose de plus pour tout $\omega \in \Omega$, $S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \dots + X_n$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{[N=n]}(S = k) = \mathbb{P}(S_n = k)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{E}(S \mid [N = n]) \text{ existe et que } \mathbb{E}(S \mid [N = n]) = n\mathbb{E}(X_1).$$
3. En déduire que S admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(S)$.

3. Couples de v.a.r.d

THÉORÈME 9 (THÉORÈME DE FUBINI)

Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs, où I, J sont des parties au plus dénombrables de $\mathbb{N}$.
Alors :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}.$$

REMARQUE **6.**
Ce résultat affirme que lorsque les quantités sommées sont positives, alors on peut intervertir les sommes sans difficulté. Ce qui est presque toujours le cas en probabilités.

EXERCICE 18. Calculer les sommes doubles suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}$ b. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i, j)$, c. $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i^j}{i!j!j}$

DÉFINITION (VOCABULAIRE DE BASE)

- **loi de couple :**
  - $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, les supports de X et Y.
  - $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

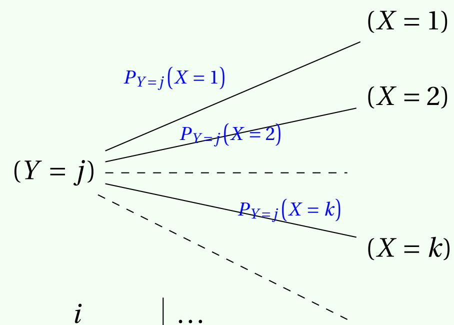
    $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$

		$Y(\Omega)$			
		1	…	j	…
	1		…		…
$X(\Omega)$	⋮	⋮	⋱		
	i			$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$	…
	⋮	⋮		⋮	⋱

- **lois conditionnelles :**

  Soit $j \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = j) \neq 0$.
  La **loi de** X **conditionnelle à** $(Y = j)$
  (ou sachant $(Y = j)$)
  est la donnée pour tout $i \in X(\Omega)$, de :

  $P_{Y=j}(X = i)$



1	2	....	i	…
$P_{Y=j}(X = 1)$	$P_{Y=j}(X = 2)$	....	$P_{Y=j}(X = i)$	…

- **lois marginales :**

  La loi de X est appelée la **première loi marginale du couple** (X, Y).

  La loi de Y est appelée la **deuxième loi marginale du couple** (X, Y).

REMARQUE **7.**
On prendra garde aux incompatibilités éventuelles entre X et Y.

En particulier, la phrase « $X_{(Y=j)}$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(j, p)$ » n'est pas formellement au programme car elle prête à confusion dans la mesure où cela signifie implicitement que $\mathbb{P}_{[Y=j]}(X = i) = 0$ pour tout $i > j$.

PROPRIÉTÉ 10 (ASOSOCIÉES À UN COUPLE DE V.A.R.D)

- **loi d'un couple :**
  une famille de réels $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ est la loi d'un couple de v.a.r.d (X,Y) définies sur un espace probabiliste $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P}) \iff \begin{cases} a_{ij}\geqslant 0 \\ \displaystyle\sum\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij}=1 \end{cases}$

- **lois marginales :**

  à partir de la loi du couple :

$$\begin{cases} \forall i\in X(\Omega),\quad \mathbb{P}([X=i])=\displaystyle\sum_{j\in Y(\Omega)}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\ \forall j\in Y(\Omega),\quad \mathbb{P}([Y=j])=\displaystyle\sum_{i\in X(\Omega)}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \end{cases}$$

  à partir des lois conditionnelles :

$$\begin{cases} \forall i\in X(\Omega),\quad \mathbb{P}([X=i])=\displaystyle\sum_{j\in Y(\Omega)}\mathbb{P}_{[Y=j]}([X=I])\mathbb{P}(Y=j) \\ \forall j\in Y(\Omega),\quad \mathbb{P}([Y=j])=\displaystyle\sum_{i\in X(\Omega)}\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j])\mathbb{P}(X=i) \end{cases}$$

- **Théorème de transfert :** pour la v.a.r.d $Z=g(X,Y)$ sous réserve d'AC on a :

$$\mathbb{E}(Z)=\sum\sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(i,j)\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$$

EXERCICE 19 (Loi d'un couple)**.** Pour $c\in\mathbb{R}$, on considère la famille $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie par

$$a_{ij}=\frac{c}{2^{i+j+1}}.$$

1. Déterminer la valeur de c pour laquelle la famille $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie la loi d'un couple de v.a.r.d. (X,Y).
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 20 (Loi binomiale conditionnée par une loi de Poisson)**.** On considère une usine fabriquant des objets. On suppose que le nombre d'objet produits en une journée, noté N, suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda>0$.
Chaque jour, la probabilité qu'un objet produit soit défectueux est $p\in]0;1[$ et on note X le nombre d'objets défectueux produit en une journée.

1. Montrer que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(N=n)$. *On indiquera clairement les cas d'incompatibilités éventuels.*
2. Montrer que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
3. *Simulation informatique :* en utilisant les commandes `rd.binomial` et texttrd.poisson, écrire une fonction d'en-tête `simul_X(lambda,p)` renvoyant une simulation de X.

EXERCICE 21 (Théorème de transfert)**.**
Soient $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$ et $Y\hookrightarrow\mathscr{G}(q)$ deux variables indépendantes avec $(p,q)\in]0;1[^2$.
On pose $Z=\min(X,Y)$.

1. Montrer que $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
2. En utilisant le théorème de transfert, écrire $\mathbb{E}(Z)$ sous forme d'une série double à termes positifs.
3. En séparant les cas $i<j,\quad i=j,\quad i>j$ montrer que $\mathbb{E}(Z)=\dfrac{1}{p+q-pq}$.

Somme de v.a.r.d

THÉORÈME 11

loi de la somme en général :

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{j\in Y(\Omega)}\mathbb{P}\big([X=k-j]\cap[Y=j]\big)=\sum_{I\in X(\Omega)}\mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=k-i]\big)$$

loi de la somme de v.a indépendantes :

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{j\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(X=k-j)\mathbb{P}(Y=j)=\sum_{I\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-j)$$

REMARQUE **8.**
Dans le cas où les variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ (ce qui est presque toujours le cas), l'évènement $(X=k-j)$ (ou $(Y=k-j)$ est impossible lorsque $k-j<0$ ce qui implique que dans les sommes précédentes l'indice j n'est en réalité sommé que sur l'intervalle $[\![0;k]\!]$ ce qui simplifie le calcul.

EXERCICE 22. Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules bleues. On extrait 3 boules de l'urne. On note X le nombre de boules blanches parmi ces 3 boules et Y le nombre de boules rouges.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y). *On donne* $\binom{9}{3}=84$.
2. En déduire la loi de la somme $X+Y$ puis déterminer $\mathbb{E}(X+Y)$ de deux façons différentes.

COROLLAIRE 12 (PROPRIÉTÉ DE STABILITÉ)

Soit $(X_1, ..., X_n)$ des v.a.r.d indépendantes et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

stabilité de la loi binomiale :

$$\forall i \in [\![1;n]\!] \quad X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n_i, p) \qquad \Longrightarrow \qquad S_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right).$$

$\leadsto$ en particulier : $\forall i \in [\![1;n]\!] \quad X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \Longrightarrow S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

stabilité de la loi de Poisson :

$$\forall i \in [\![1;n]\!] \quad X_i \hookrightarrow \mathscr{P}(_i) \qquad \Longrightarrow \qquad S_n \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right).$$

EXERCICE 23. Suite de variables de Poisson indépendantes
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire mutuellement indépendantes.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la variable X_n suit la loi de Poisson de paramètre 1 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

1. Quelle est la loi de S_n ? En déduire son espérance et sa variance.
2. Déterminer l'espérance et la variance de S_n^*.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(S_n^* \leqslant 0) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.

5. Covariance, variance et coefficient de corrélation linéaire

DÉFINITION (COVARIANCE DE DEUX VARIABLES)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que les variables $X - \mathbb{E}(X)$ et $Y - \mathbb{E}(Y)$ admettent une espérance .
On appelle **covariance de X et de Y** le nombre réel :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big).$$

REMARQUE 9.
En développant le produit $(X - \mathbb{E}(X))\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)$ on trouve $XY - \big(\mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(Y)X\big) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Par linéarité de l'espérance, l'existence de l'espérance des variables X, Y et XY donne donc une condition suffisante à l'existence de $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
Or on sait que si une variable admet un moment d'ordre 2 elle admet une espérance et l'inégalité $xy \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2}$ valable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, implique qu'une condition suffisante d'existence de $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est que X **et** Y admette un moment d'ordre 2.

PROPRIÉTÉ 13 (OPÉRATIONS)

Soient X, X', Y et Y' quatre variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2 et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- **bilinéarité :**
  linéarité à gauche : $\mathrm{Cov}(\lambda X + \mu X', Y) = \lambda \mathrm{Cov}(X, Y) + \mu \mathrm{Cov}(X', Y)$
  linéarité à droite : $\mathrm{Cov}(X, \lambda Y + \mu Y') = \lambda \mathrm{Cov}(X, Y) + \mu \mathrm{Cov}(X, Y')$
- **symétrie :** $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
- **positivité et lien avec la variance :** $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X) \geqslant 0$
- **définie positivité :** $\mathrm{Cov}(X, X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0$ p.s.

REMARQUE 10.
Nous verrons dans un chapitre futur que ces 4 propriétés définissent la notion de *produit scalaire* sur un espace vectoriel, ici celui des v.a.r.d admettant un moment d'ordre 2.

THÉORÈME 14 (FORMULE DE HUYGENS)

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 on a :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

REMARQUE 11.
Comme pour la variance, c'est ce résultat qui est le plus utile en pratique, de sorte que nous ne reviendrons (quasiment) jamais à la définition.

EXERCICE 24. On reprend l'exercice **??**. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

COROLLAIRE 15

X et Y admettent un moment d'ordre 2

$$X \text{ et } Y \text{ sont } \textbf{indépendantes} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \mathrm{Cov}(X,Y)=0.$$

⇝ et donc par contraposée :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)\neq 0 \Longrightarrow X \text{ et } Y \textbf{ ne sont pas } \text{indépendantes.}$$

REMARQUE **12.**
$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ n'entraine pas nécessairement que X et Y sont indépendantes. Prendre $Y=X^2$ avec $X \hookrightarrow [\![-1;1]\!]$.
On peut quand même voir la covariance comme une quantité numérique qui mesure le défaut d'indépendance des variables mais la notion adéquate est la notion suivante :

DÉFINITION (VARIABLES NON CORRÉLÉES)

Si $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, on dit que les variables X et Y sont **non corrélées** .

EXERCICE 25 (Indépendance mutuelle)**.**
Soit $n\geqslant 2$. On considère une urne U contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule **avec remise** de la boule dans l'urne U. Soit $k\geqslant 1$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note X_i la variable égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Donner la loi de X_i et rappeler l'espérance de X_i.
2. Les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont elles mutuellement indépendantes?
3. Soient $i, j\in[\![1,n]\!]$, tels que $i\neq j$.
   (a) Déterminer la loi de la variable X_i+X_j
   (b) En déduire la covariance du couple (X_i,X_j)

Variance

THÉORÈME 16

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2. Alors :

- $X+Y$ admet une variance et de plus $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$
- si de plus X et Y sont **indépendantes**, alors $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$.

REMARQUE **13.**
On remarquera que la première égalité nous donne une autre méthode pour calculer la covariance de deux variables :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{\mathbb{V}(X+Y)-\mathbb{V}(X)-\mathbb{V}(Y)}{2}$$

THÉORÈME 17 (GÉNÉRALISATION)

Si $X_1,\cdots,X_n$ admettent un moment d'ordre 2. Alors,

- $X_1+\cdots+X_n$ admet une variance et :
$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)+2\sum\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$
- si de plus elles sont **indépendantes** :
$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)$$

EXERCICE 26 (Moyenne empirique)**.**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi.
On suppose que X_1 admet un moment d'ordre 2 et on note $\mu=\mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2=\mathbb{V}(X_1)$.
On considère pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la v.a.r.d $\overline{X_n}$, appelée **moyenne empirique de l'échantillon** $(X_1,\dots,X_n)$ et définie par :

$$\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer en fonction de n,μ et σ l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$. *On montrera au préalable que ces quantités existent.*

EXERCICE 27 (Suite de variables de Bernoulli indépendantes)**.**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire mutuellement indépendantes.
On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$ X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0;1[$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on note

$$Y_n=X_nX_{n+1}\quad\text{et}\quad T_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i.$$

1. Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la loi de (Y_n,Y_{n+1}) et $Cov(Y_n,Y_{n+1})$.
3. Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout entier $k\geqslant 2$, la loi de (Y_n,Y_{n+k}).
   Les variables Y_n et Y_{n+k} sont-elles indépendantes?
4. Déterminer l'espérance et la variance de T_n.

Coefficient de corrélation linéaire

DÉFINITION (COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE)

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et de variance non nulle.On appelle **coefficient de corrélation linéaire de** X **et** Y le réel :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Rappel : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ est appelé l'écart-type de X.
Interprétation :
Ce nombre est un réel compris entre -1 et 1 qui compare les similarités entre les lois de X et de Y.
Cas $\rho(X,Y) = 1$: Dans ce cas l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable càd $Y = aX + b$ avec $a > 0$.
Cas $\rho(X,Y) = -1$: Dans ce cas l'une des variables est fonction affine décroissante de l'autre variable càd $Y = aX + b$ avec $a < 0$.
Cas $\rho(X,Y) \in]-1;1[$: Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables. Plus le coefficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les variables est forte; on emploie parfois l'expression « **fortement corrélées** » pour qualifier les deux variables.
Cas $\rho(X,Y) = 0$: Une corrélation égale à 0 signifie que les variables sont linéairement indépendantes.

EXERCICE 28.
Soit $U \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $V \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ deux variables indépendantes.
On note $X = U + V$ et $Y = U - V$.

1. Déterminer $\rho(X,Y)$ en fonction de λ et μ.
2. Discuter suivant les valeurs de λ et μ du degré de corrélation des variables X et Y.

EXERCICE 29. On considère n un entier supérieur ou égal à 2 et urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
Dans cette urne, on extrait successivement et sans remise deux jetons au hasard et on note N_1 la variable aléatoire donnant le numéro du premier jeton, N_2 du second.

1. Déterminer $P(N_1 = i)$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$. Déterminer $P_{[N_1=i]}\left(N_2 = j\right)$ pour tout $i, j \in [\![1;n]\!]$ et en déduire $P\left(N_2 = j\right)$ pour tout $j \in [\![1;n]\!]$. Comparer les lois de N_1 et N_2.
2. Déterminer les probabilités de $P\left([N_1 = i] \cap [N_2 = j]\right)$ pour tout $\left(i,j\right) \in [\![1;n]\!]^2$ (i.e. déterminer la loi du couple de vard (N_1, N_2)).
3. Montrer que $E(N_1 N_2) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$.
4. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de (N_1, N_2).
5. Déterminer $V(N_1 + N_2)$.

6. Appendice : formulaires des lois discrètes usuelles

Les lois discrètes de support fini

Lois uniformes $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$:

$\rightsquigarrow$ **elles traduisent une situation d'équiprobabilité.**
Généralisation à $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a,b]\!])$ en posant $Y = X + (a-1)$ et $n = b - (a-1)$ avec $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$

PROPRIÉTÉ 18

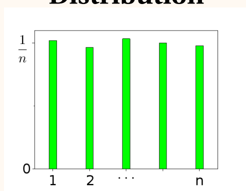
Support
$X(\Omega) = [\![1,n]\!]$

Loi
$P(X = k) = \dfrac{1}{n}$

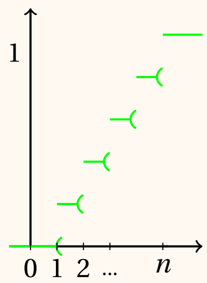
Variance
$V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$

Espérance
$E(X) = \dfrac{n+1}{2}$

Distribution



Fonction de répartition



Python : `rd.randint(a,b)`, `rd.randint(a,b,n)`, `rd.randint(a,b,(r,s)` renvoie resp. une, n et $r \times s$ de lois uniformes $\mathscr{U}([\![a,b-1]\!])$ *indépendantes*

EXEMPLE. La condition `if rd.randint(1,4)==1` est équivalente à la condition `if rd.random()<1/3`. Ces deux conditions se produisent avec probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Lois de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ (avec $p \in [0,1]$) :

⇝ elles modélisent une épreuve ayant deux issues.

PROPRIÉTÉ 19

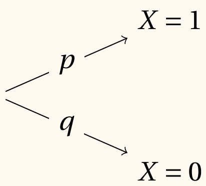
Support

$X(\Omega) = \{0,1\}$

Loi

$P(X=1) = p$

$P(X=0) = 1-p = q$



Variance

$V(X) = pq$

Espérance

$E(X) = p$

Lois binomiales $\mathscr{B}(n,p)$ (avec $p \in [0,1]$)

⇝ variables aléatoires égalent au nombre de succès obtenus à la suite de n épreuves de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ indépendantes.

PROPRIÉTÉ 20

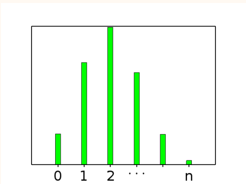
Support

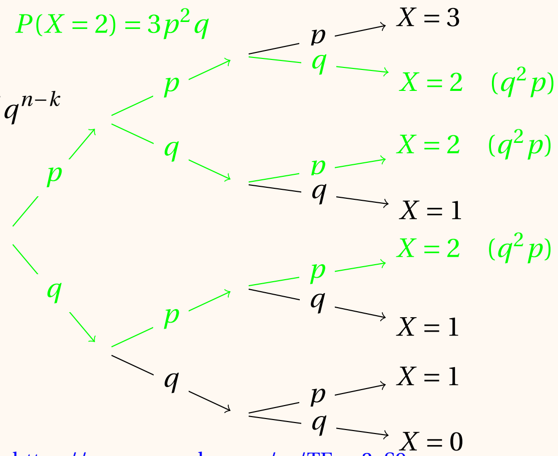
$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$

Loi

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Distribution





Variance

$V(X) = npq$

Espérance

$E(X) = np$

https://www.geogebra.org/m/TFwq3vS9
https://www.geogebra.org/m/k9QT6WBT

REMARQUE **14.**
$\mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1,p)$: la loi de Bernoulli est un cas particulier de la loi binomiale.
Python : `rd.binomial(n,p)`, `rd.binomial(n,p,n)`, `rd.binomial(n,p,(r,s))` renvoie resp. une, n et $r \times s$ de lois uniformes $\mathscr{B}(n,p)$ indépendantes

EXEMPLE. On lance une pièce avec probabilité $\frac{1}{3}$ de faire PILE.
La commande `np.mean(rd.binomial(10,1/3,1000))` renvoie la fréquence d'apparition du nombre de PILE sur 10 lancers de cette pièce, expérience que l'on reproduit 1000 fois.

Lois discrètes usuelles infinies

Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ (avec $p \in]0,1[$)

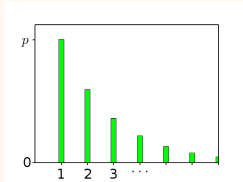
⇝ variables aléatoires égalent au rang du premier succès obtenus à la suite d'une succession d'épreuves de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ indépendantes.

PROPRIÉTÉ 21

Support

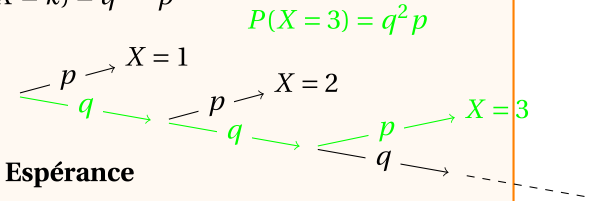
$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

Distribution



Loi

$P(X=k) = q^{k-1}p$



Variance

$\dfrac{q}{p^2}$

Espérance

$E(X) = \dfrac{1}{p}$

Python : `rd.geometricl(n,p)`, `rd.geometric(n,p,n)`, `rd.geometricl(n,p,(r,s))` renvoie resp. une, n et $r \times s$ de lois uniformes $\mathscr{G}(p)$ indépendantes

EXEMPLE. On lance une pièce avec probabilité $\frac{1}{3}$ de faire PILE.
La commande `np.mean(rd.geometric(1/3,1000))` renvoie la nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir le 1er PILE, sur 1000 simulations de l'expérience.

Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ **(avec** $\lambda > 0$**)**

$\rightsquigarrow$ **loi « limite » d'une suite de variables suivant la loi binomiale** $\mathscr{B}(n, \frac{\lambda}{n})$

PROPRIÉTÉ 22

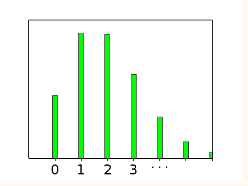
Support

$X(\Omega) = \mathbb{N}$

Loi

$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Distribution



Variance

λ

Espérance

$E(X) = \lambda$

Lien 1 :La loi de poisson...avec des poissons

Lien 2 :https://www.geogebra.org/m/JzpkSqVy

Python : `rd.poisson(lambda)`, `rd.poisson(lambda,n)`, `rd.poisson(lambda,(r,s))` renvoie resp. une, n et $r \times s$ de lois $\mathscr{P}(\lambda)$ indépendantes

EXEMPLE. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(20)$.
Si $X = n$ on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on pioche une boule dans cette urne.
On note Y le numéro de la boule tirée.
La commande `X=np.poisson(20)` simule la variable X et `Y=np.randint(X+1)` simule Y.